



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

## **Методические указания** для самостоятельной работы и выполнения расчетно-графической работы №2

# **«Теоретическая механика»**

Авторы  
Высоковский Д. А.,  
Савельева Н. А.

Ростов-на-Дону, 2024

## Аннотация

Теоретическая механика: методические указания для самостоятельной работы и выполнения расчетно-графической работы №2 для обучающихся по направлению 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

В методических указаниях представлены примеры решения заданий по каждой теме практических занятий разделов «Статика» и «Кинематика». Каждая тема предваряется кратким изложением теоретических вопросов необходимых для решения задач.

## Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика»

Высоковский Д.А.

ассистент кафедры «Техническая механика»  
Савельева Н.А.



## Оглавление

<b>ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ.....</b>	<b>4</b>
<b>Задача 1 .....</b>	<b>6</b>
<b>Задача 2 .....</b>	<b>14</b>
<b>Задача 3 .....</b>	<b>18</b>
<b>Задача 4 .....</b>	<b>28</b>

## ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют 4 контрольных задания.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

*Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.*

Каждое задание выполняется на отдельном листе формата А4. Контрольная работа должна иметь титульный лист, на котором указываются: название учебного заведения, название дисциплины, номер работы, название группы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, фамилия преподавателя, город и год.

На листе с решением сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;* на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно*. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов*. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

*Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.*

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице  $P_1, h, r_1$  и т. п. означают вес или размеры тела 1;  $P_2, h, r_2$  – тела 2 и т. д. Аналогично, в  $v_B, a_B$  означают скорость и ускорение точки  $B$ ;  $v_C, a_C$  – точки  $C$ ;  $\omega_1, \varepsilon_1$  – угловую скорость и угловое ускорение тела 1,  $\omega_2, \varepsilon_2$  – тела 2 и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайтесь внимание только на относящиеся *к вашему варианту*, т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями*; в конце должны быть даны ответы.

## ЗАДАЧА 1

Под номером 4 помещены две задачи 4а и 4б, которые надо решить.

**Указания.** Задача 1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

$$v_x = x' \quad v_y = y' \quad v_z = z' \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$a_x = x'' \quad a_y = y'' \quad a_z = z'' \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени  $t_1 = 1$  с.

**Пример 1а.** Даны уравнения движения точки в плоскости  $xу$ :

$$x = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3 \quad y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

( $x, y$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени  $t_1 = 1$  с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

**Решение.** 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время  $t$ . Поскольку  $t$  входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right) \quad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2 \frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. 1а):

$$x = (y+1)^2 + 1 \quad (2)$$

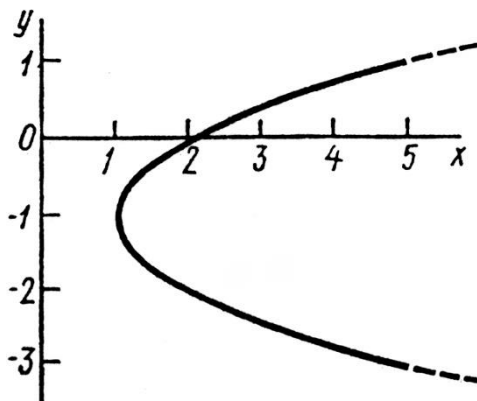


Рис. 1а

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при  $t_1 = 1$  с

$$v_{1x} = 1,11 \text{ см/с}, v_{1y} = 0,73 \text{ см/с}, v_1 = 1,33 \text{ см/с}.$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при  $t_1 = 1$  с

$$a_{1x} = 0,87 \text{ см/с}^2, a_{1y} = -0,12 \text{ см/с}^2, a_1 = 0,88 \text{ см/с}^2. \quad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ . Получим

$$2v \frac{dv}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt},$$

откуда

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \quad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при  $t_1 = 1$  с  $a_{1\tau} = 0,66 \text{ см/с}^2$ .



5. Нормальное ускорение точки  $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$ . Подставляя сюда найденные числовые значения  $a_1$  и  $a_{1\tau}$  получим, что при  $t_1 = 1$  с  $a_{1n} = 0,58$  см/с<sup>2</sup>.

6. Радиус кривизны траектории  $\rho = v^2 / a_n$ . Подставляя сюда числовые значения  $v_1$  и  $a_{1n}$ , найдем, что при  $t_1 = 1$  с  $\rho_1 = 3,05$  см.

Ответ:  $v_1 = 1,33$  см/с,  $a_1 = 0,88$  см/с<sup>2</sup>,  $a_{1\tau} = 0,66$  см/с<sup>2</sup>,  $a_{1n} = 0,58$  см/с<sup>2</sup>,  $\rho_1 = 3,05$  см.

**Пример 16.** Точка движется по дуге окружности радиуса  $R$   
 $s = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$   
 = 2 м по закону  $(s - \text{в метрах, } t - \text{в секундах})$ , где  $s = AM$  (рис. 46). Определить скорость и ускорение точки в момент времени  $t_1 = 1$  с.

**Решение.** Определяем скорость точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right)$$

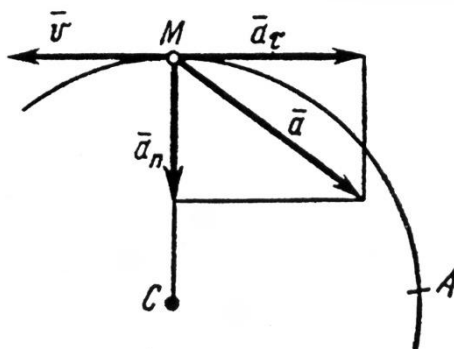


Рис. 16

При  $t_1 = 1$  с получим  $v_1 = \pi\sqrt{2} = 1,11$  м/с.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{8} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}$$

При  $t_1 = 1$  с получим, учтя, что  $R = 2$  м,

$$a_{1\tau} = -\pi^2\sqrt{2}/16 = 0,87 \text{ м/с}^2, \quad a_{1n} = v_1^2/2 = \pi^2/16 = 0,62 \text{ м/с}^2.$$

Тогда ускорение точки при  $t_1 = 1$  с будет

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \pi^2\sqrt{3}/16 = 1,07 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рис. К16 векторы  $\vec{v}_1$  и  $\vec{a}_1$ , учитывая знаки  $v_1$  и  $a_{1\tau}$  и считая положительным направление от  $A$  к  $M$ .

### Условия

**Задача 1а.** Точка  $B$  движется в плоскости  $xu$  (рис. 4.0 – 4.9, табл. 4; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями:  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ . где  $x$  и  $y$  выражены в сантиметрах,  $t$  – в секундах.

Таблица 1

Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	рис. 0–2	рис. 3–6	рис. 7–9	
1	2	3	4	5
0	$12 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2 + 2$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$-6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-3 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6t - 2t^2$
3	$9 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^3$	$10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 3t^2$	$12 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$6 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2 - 10t$
7	$-2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+1)^3$	$-8 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2 - t^3$	$9 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Найти уравнение траектории точки; для момента времени  $t_1 = 1$  с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость  $x = f_1(t)$  указана непосредственно на рисунках, а зависимость  $y = f_2(t)$  дана в табл. 4 (для рис. 0–2 в столбце 2, для рис. 3–6 в столбце 3, для рис. 7–9 в столбце 4).

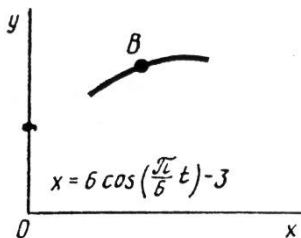


Рис. 1.0

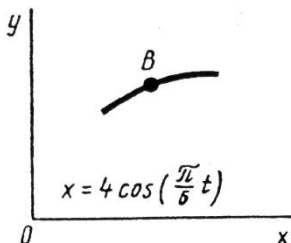


Рис. 1.1

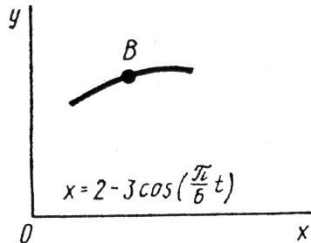


Рис. 1.2

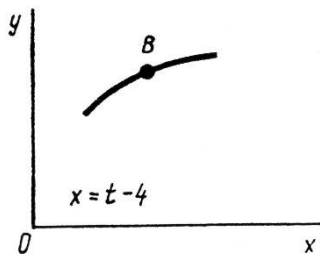


Рис. 1.3

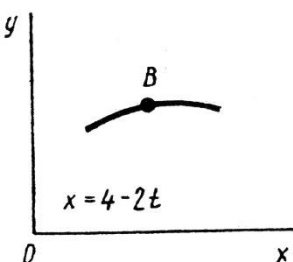


Рис. 1.4

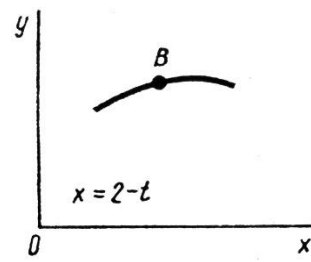


Рис. 1.5

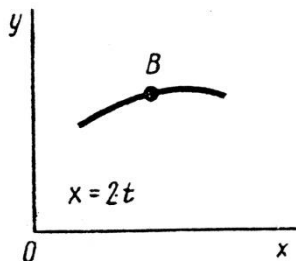


Рис. 1.6

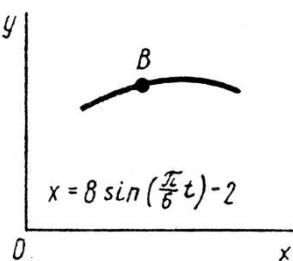


Рис. 1.7

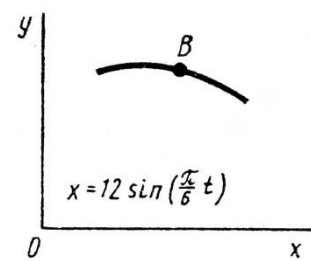


Рис. 1.8

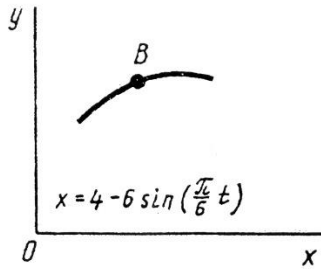


Рис. 1.9

**Задача 16.** Точка движется по дуге окружности радиуса  $R = 2$  м по закону  $s = f_1(t)$ , заданному в табл. 1 в столбце 5 ( $s$  – в метрах,  $t$  – в секундах), где  $s = AM$  – расстояние точки от некоторого начала  $A$ , измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени  $t_1 = 1$  с. Изобразить на рисунке векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{a}$ , считая, что точка в этот момент находится в положении  $M$ , а положительное направление отсчета  $s$  – от  $A$  к  $M$ .

## ЗАДАЧА 2

**Указания.** Закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:  $\varphi = f(t)$ . Угловая скорость:  $\omega = \dot{\varphi}$ . Угловое ускорение:  $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ .

При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

**Пример 2.** Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами  $R_2$  и  $r_2$  и колесо 3 радиуса  $R_3$ , скрепленное с валом радиуса  $r_3$ , находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. 2). Рейка движется по закону  $s_1 = f(t)$ .

Д а н о:  $R_2 = 6$  см,  $r_2 = 4$  см,  $R_3 = 8$  см,  $r_3 = 3$  см,  $s_1 = 3t^3$  ( $s$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах),  $A$  – точка обода колеса 3,  $t_1 = 3$  с. Определить:  $\omega_3$ ,  $v_A$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $a_A$  в момент времени  $t = t_1$ .

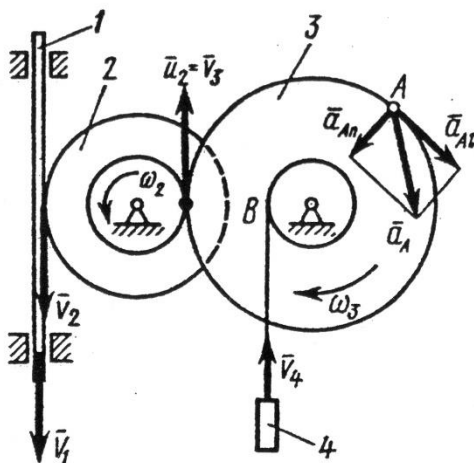


Рис. 2

**Решение.** Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса  $R$ ), через  $v_i$ , а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса  $r$ ), – через  $u_i$ .

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени  $t$ . Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2. \quad (1)$$

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то  $v_2 = v_1$  или  $\omega_2 R_2 = v_1$ . Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно,  $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$ . Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3} \omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \quad (2)$$

Тогда для момента времени  $t_1 = 3$  с получим  $\omega_3 = 6,75 \text{ с}^{-1}$ .

2. Определяем  $v_4$ . Так как  $v_4 = v_B = \omega_3 r_3$ , то при  $t_1 = 3$  с  $v_4 = 20,25 \text{ см/с}$ .

3. Определяем  $\varepsilon_3$ . Учитывая второе из равенств (2), получим  $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1,5 t$ . Тогда при  $t_1 = 3$  с  $\varepsilon_3 = 4,5 \text{ с}^{-2}$ .

4. Определяем  $a_A$ . Для точки A  $\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$ , где численно  $\bar{a}_{A\tau} = R_3 \varepsilon_3$ ,  $\bar{a}_{An} = R_3 \omega_3^2$ . Тогда для момента времени  $t_1 = 3$  с имеем

$$\bar{a}_{A\tau} = 36 \text{ см/с}^2, \quad \bar{a}_{An} = 364,5 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366,3 \text{ см/с}^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. 2.

Ответ:  $\omega_3 = 6,75 \text{ с}^{-1}$ ;  $v_4 = 20,25 \text{ см/с}$ ;  $\varepsilon_3 = 4,5 \text{ с}^{-2}$ ;  $a_A = 366,3 \text{ см/с}^2$ .

### Условия.

Механизм состоит из ступенчатых колес 1–3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес

(рис. 2.0 – 2.9, табл. 2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 –  $r_1 = 2$  см,  $R_1 = 4$  см, у колеса 2 –  $r_2 = 6$  см,  $R_2 = 8$  см, у колеса 3 –  $r_3 = 12$  см,  $R_3 = 16$  см. На ободьях колес расположены точки A, B и C.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где  $\varphi_1(t)$  – закон вращения колеса 1,  $s_4(t)$  – закон движения рейки 4,  $\omega_2(t)$  – закон изменения угловой скорости колеса 2,  $v_5(t)$  – закон изменения скорости груза 5 и т. д. (везде  $\varphi$  выражено в радианах,  $s$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах). Положительное направление для  $\varphi$  и  $\omega$  против хода часовой стрелки, для  $s_4$ ,  $s_5$  и  $v_4$ ,  $v_5$  – вниз.

Определить в момент времени  $t_1 = 2$  с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости ( $v$  – линейные,  $\omega$  – угловые) и ускорения ( $a$  – линейные,  $\varepsilon$  – угловые) соответствующих точек или тел ( $v_5$  – скорость груза 5 и т. д.).

Таблица 5

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	$v_B, v_C$	$\varepsilon_2, a_A, a_5$
1	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	$v_A, v_C$	$\varepsilon_3, a_B, a_4$
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	$v_4, \omega_2$	$\varepsilon_2, a_C, a_5$
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	$v_5, v_B$	$\varepsilon_2, a_A, a_4$
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	$v_4, \omega_1$	$\varepsilon_1, a_B, a_5$
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	$v_5, v_B$	$\varepsilon_2, a_C, a_4$
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	$v_4, \omega_1$	$\varepsilon_1, a_C, a_5$
7	$v_4 = 3t^2 - 8$	$v_4, v_B$	$\varepsilon_3, a_B, a_5$
8	$s_5 = 8t - 3t^2$	$v_4, \omega_2$	$\varepsilon_1, a_C, a_4$
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	$v_5, \omega_B$	$\varepsilon_2, a_A, a_4$

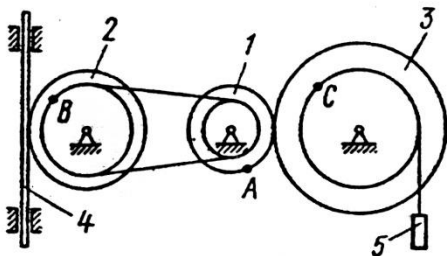


Рис. 2.0

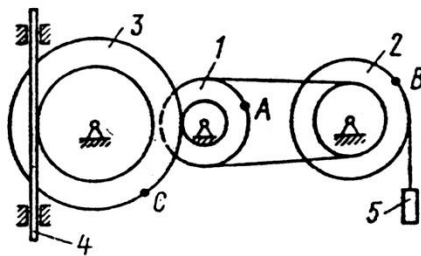


Рис. 2.1



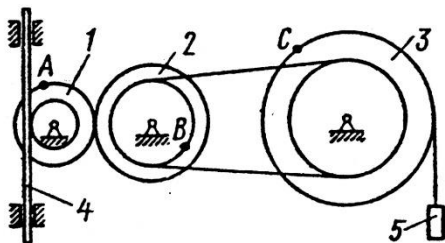


Рис. 2.2

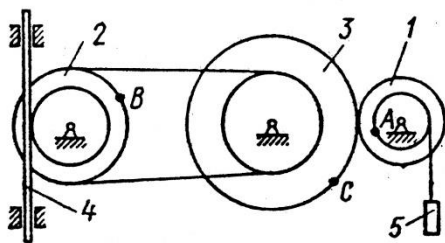


Рис. 2.3

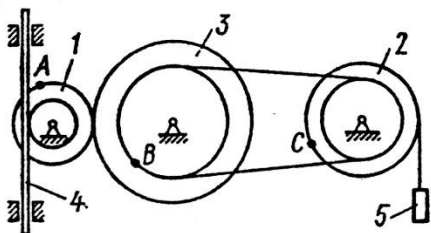


Рис. 2.4

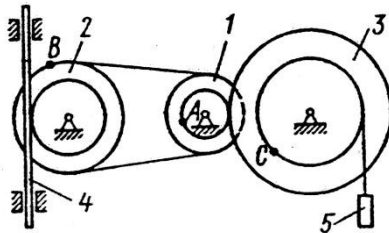


Рис. 2.5

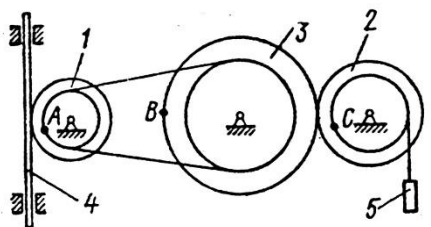


Рис. 2.6

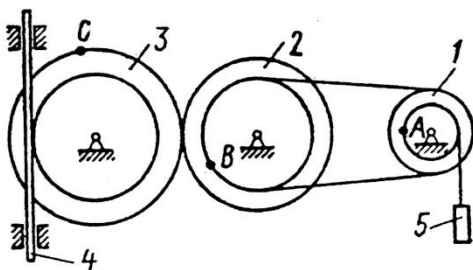


Рис. 2.7

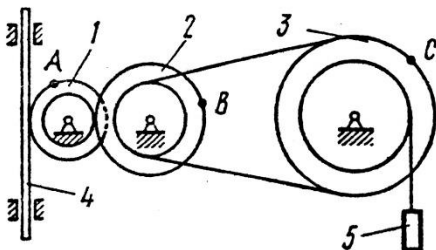


Рис. 2.8

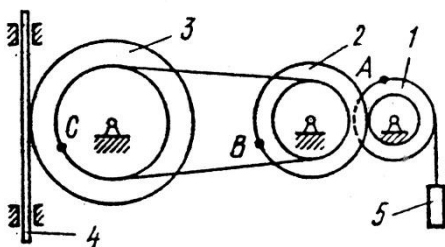


Рис. 2.9

### ЗАДАЧА 3

**Указания:** Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела:  $x_A = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ ,  $\varphi = f_3(t)$ . Скорость при плоскопараллельном движении твердого тела:  $v = v_{\text{пост}} + v_{\text{вращ}}$ .

Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

При решении задачи для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому звену механизма в отдельности**.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n$ , где  $A$  – точка, ускорение  $\bar{a}_A$  которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка  $A$  движется по дуге окружности, то  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^n$ );  $B$  – точка, ускорение  $\bar{a}_B$  которой нужно определить.

**Пример 3.** Механизм (рис.3а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна  $B$ , соединенных друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1$  и  $O_2$  шарнирами.

Д а н о:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 150^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $AD = DB$ ,  $h_1 = 0,4$  м,  $h_2 = 1,2$  м,  $h_3 = 1,4$  м,  $\omega_1 = 2$  с<sup>-1</sup>,  $\varepsilon_1 = 7$  с<sup>-2</sup> (направления  $\omega_1$  и  $\varepsilon_1$  – против хода часовой стрелки). Определить:  $v_B$ ,  $v_E$ ,  $\omega_2$ ,  $a_B$ ,  $\varepsilon_3$ .

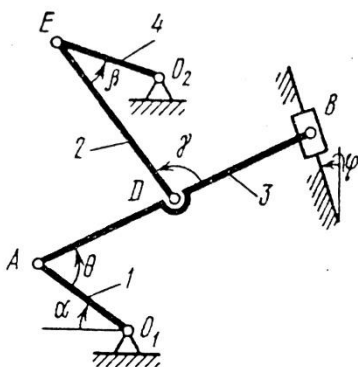


Рис. 3а

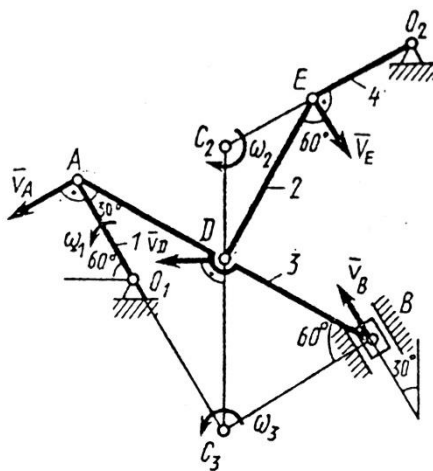


Рис. 3б

**Решение.** 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 3б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем  $v_B$ . Точка  $B$  принадлежит стержню  $AB$ . Чтобы найти  $v_B$ , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление  $\bar{v}_B$ . По данным задачи, учитывая направление

$\omega_1$ ,

можем определить  $\bar{v}_A$ ; численно

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_A \perp O_1 A. \quad (1)$$

Направление  $\bar{v}_B$  найдем, учтя, что точка  $B$  принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная  $\bar{v}_A$  и направление  $\bar{v}_B$ , воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня  $AB$ ) на прямую, соединяющую эти точки (прямая  $AB$ ). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор  $\bar{v}_B$  (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ \text{ и } v_B = 0,46 \text{ м/с.} \quad (2)$$

3. Определяем  $\vec{v}_E$ . Точка  $E$  принадлежит стержню  $DE$ . Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить  $\vec{v}_E$ , надо сначала найти скорость точки  $D$ , принадлежащей одновременно стержню  $AB$ . Для этого, зная  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$ , строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня  $AB$ ; это точка  $C_3$ , лежащая на пересечении перпендикуляров к  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$ , восстановленных из точек  $A$  и  $B$  (к  $\vec{v}_A$  перпендикулярен стержень  $AB$ ). По направлению вектора  $\vec{v}_A$  определяем направление поворота стержня  $AB$  вокруг МЦС  $C_3$ . Вектор  $\vec{v}_D$  перпендикулярен отрезку  $C_3D$ , соединяющему точки  $D$  и  $C_3$ , и направлен в сторону поворота. Величину  $\vec{v}_D$  найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B} \quad (3)$$

Чтобы вычислить  $C_3D$  и  $C_3B$ , заметим, что  $\triangle AC_3B$  – прямоугольный, так как острые углы в нем равны  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , и что  $C_3B = AB \sin 30^\circ = 0,5AB = BD$ . Тогда  $\triangle BC_3D$  является равнобедренным и  $C_3B = C_3D$ . В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0,46 \text{ м/с; } \vec{v}_D \perp C_3D. \quad (4)$$

Так как точка  $E$  принадлежит одновременно стержню  $O_2E$ , вращающемуся вокруг  $O_2$ , то  $\vec{v}_E \perp O_2E$ . Тогда, восстанавливая из точек  $E$  и  $D$  перпендикуляры к скоростям  $\vec{v}_E$  и  $\vec{v}_D$ , построим МЦС  $C_2$  стержня  $DE$ . По направлению вектора  $\vec{v}_D$  определяем направление поворота стержня  $DE$  вокруг центра  $C_2$ . Вектор  $\vec{v}_E$  направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К36 видно, что

$\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$ , откуда  $C_2E = C_2D$ . Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}, \quad v_E = v_D = 0,46 \text{ м/с}; \quad (5)$$

4. Определяем  $\omega_2$ . Так как МЦС стержня 2 известен (точка  $C_2$ ) и  $C_2D = l_2/(2\cos 30^\circ) = 0,69 \text{ м}$ , то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0,67 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

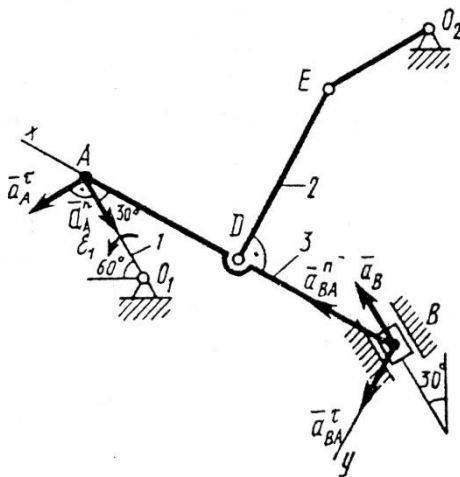


Рис. 3в

5. Определяем  $\bar{a}_B$  (рис. 3в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка  $B$  принадлежит стержню  $AB$ . Чтобы найти  $\bar{a}_B$ , надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня  $AB$  и траекторию точки  $B$ . По данным задачи можем определить  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$ , где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1,6 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

Вектор  $\bar{a}_A^n$  направлен вдоль  $AO_1$ , а  $\bar{a}_A^\tau$  – перпендикулярно  $AO_1$ ; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. 3в). Так как точка  $B$  одновременно принадлежит ползуну, то вектор  $\bar{a}_B$  параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор  $\bar{a}_B$  на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и  $\bar{v}_B$ .

Для определения  $\bar{a}_B$  воспользуемся равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы  $\bar{a}_{BA}^n$  (вдоль  $BA$  от  $B$  к  $A$ ) и  $\bar{a}_{BA}^\tau$  (в любую сторону перпендикулярно  $BA$ ); численно  $\bar{a}_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$ . Найдя  $\omega_3$  с помощью построенного МЦС  $C_3$  стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3 A} = \frac{v_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0,66 \text{ с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0,61 \text{ м/с}^2. \quad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), известны только числовые значения  $a_B$  и  $a_{BA}^\tau$ ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить  $a_B$  спроектируем обе части равенства (8) на направление  $BA$  (ось  $x$ ), перпендикулярное неизвестному вектору  $\bar{a}_{BA}^\tau$ . Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n \quad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0,72 \text{ м/с}^2. \quad (11)$$

Так как получилось  $a_B > 0$ , то, следовательно, вектор  $\vec{a}_B$  направлен как показано на рис. 3в.

6. Определяем  $\varepsilon_3$ . Чтобы найти  $\varepsilon_3$ , сначала определим  $a_{BA}^\tau$ . Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное  $AB$  (ось  $y$ ). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau \quad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что  $a_{BA}^\tau = -3,58 \text{ м/с}^2$ . Знак указывает, что направление  $\vec{a}_{BA}^\tau$  противоположно показанному на рис. К3в.

Теперь из равенства  $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$  получим

$$\varepsilon_3 = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l_3} = 2,56 \text{ с}^{-2}$$

Ответ:  $v_B = 0,46 \text{ м/с}$ ;  $v_E = 0,46 \text{ м/с}$ ;  $\omega_2 = 0,67 \text{ с}^{-1}$ ;  $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon_3 = 2,56 \text{ с}^{-2}$ .

*Примечание.* Если точка  $B$ , ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. 6.0 – 6.4, где  $B$  движется по окружности радиуса  $O_2B$ ), то направление  $\vec{a}_B$  заранее неизвестно.

В этом случае  $\vec{a}_B$  также следует представить двумя составляющими ( $\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$ ) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n \quad (13)$$

При этом вектор  $\bar{a}_B^n$  (см., например, рис. 3.0) будет направлен вдоль  $BO_2$ , а вектор  $\bar{a}_B^\tau$  – перпендикулярно  $BO_2$  в любую сторону. Числовые значения  $a_B^\tau$ ,  $a_B^n$  и  $a_{BA}^n$  определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть  $a_A^\tau = 0$  или  $a_A^n = 0$ , если точка  $A$  движется прямолинейно).

Значение  $a_B^n$  также вычисляется по формуле  $a_B^n = v_B^2 / \rho = v_B^2 / l$ , где  $l$  – радиус окружности  $O_2B$ , а  $v_B$  определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения  $a_B^\tau$  и  $a_{BA}^\tau$  и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя  $a_B^\tau$ ? можем вычислить искомое ускорение  $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$ . Величина  $a_{BA}^\tau$  служит для нахождения  $\varepsilon_{AB}$  (как в рассмотренном примере).

### Условия

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна  $B$  или  $E$  (рис. 3.0 – 3.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползуну  $B$  и  $E$  (рис. 3.8, 3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1$ ,  $O_2$  шарнирами; точка  $D$  находится в середине стержня  $AB$ . Длины стержней равны соответственно  $l_1 = 0,4$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 1,4$  м,  $l_4 = 0,6$  м. Положение механизма определяется углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ . Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. 6а (для рис. 0–4) или в табл. 3б (для рис. 5–9); при этом в табл. 3а  $\omega_1$  и  $\omega_4$  – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».



Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: **по ходу или против хода часовой стрелки** (например, угол  $\gamma$  на рис. 8 следует отложить от  $DB$  по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 – против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом  $\alpha$ ; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере 3 (см. рис. 36).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость  $\bar{v}_B$  и ускорение  $a_B$  – от точки  $B$  к  $b$  (на рис. 5–9).

Таблица 3а (к рис. 3.0 – 3.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi$	$\theta$	$\omega_1$ , 1/с	$\omega_4$ , 1/с	$v$ точек	$\omega$ звена	$a$ точки	$\varepsilon$ звена
0	0	60	30	0	120	6	–	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
1	90	120	150	0	30	–	4	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$
2	30	60	30	0	120	5	–	$B, E$	$AB$	$B$	$AB$
3	60	150	150	90	30	–	5	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$
4	30	30	60	0	150	4	–	$D, E$	$AB$	$B$	$AB$
5	90	120	120	90	60	–	6	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$
6	90	150	120	90	30	3	–	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
7	0	60	60	0	120	–	2	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$
8	60	150	120	90	30	2	–	$D, E$	$AB$	$B$	$AB$
9	30	120	150	0	60	–	8	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$

Таблица 3б (к рис. 3.5 – 3.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi$	$\theta$	$\omega_1$ , 1/с	$\varepsilon_1$ , 1/с <sup>2</sup>	$v_B$ , м/с	$a_B$ , м/с <sup>2</sup>	$v$ точек	$\omega$ звена	$a$ точки	$\varepsilon$ звена
0	120	30	30	90	150	2	4	–	–	$B, E$	$AB$	$B$	$AB$
1	0	60	90	0	120	–	–	4	6	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$
2	60	150	30	90	30	3	5	–	–	$B, E$	$AB$	$B$	$AB$
3	0	150	30	0	60	–	–	6	8	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$
4	30	120	120	0	60	4	6	–	–	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
5	90	120	90	90	60	–	–	8	10	$D, E$	$DE$	$A$	$AB$
6	0	150	90	0	120	5	8	–	–	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
7	30	120	30	0	60	–	–	2	5	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$

8	90	120	120	90	150	6	10	—	—	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
9	60	60	60	90	30	—	—	5	4	$D, E$	$AB$	$A$	$AB$

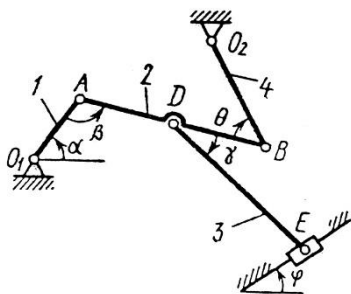


Рис. 3.0

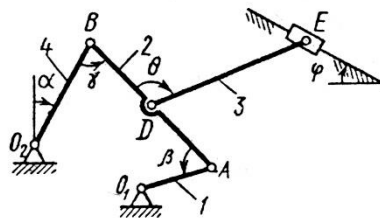


Рис. 3.1

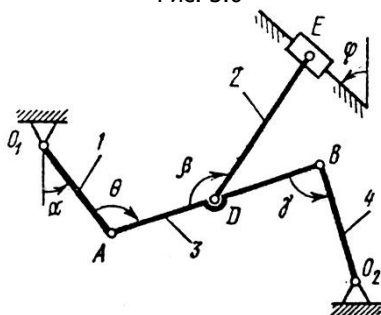


Рис. 3.2

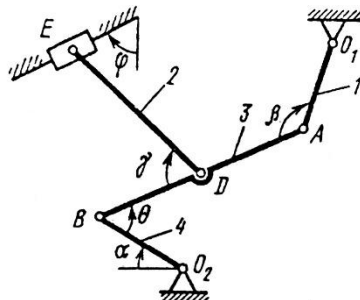


Рис. 3.3

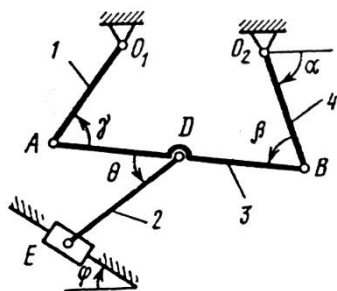


Рис. 3.4

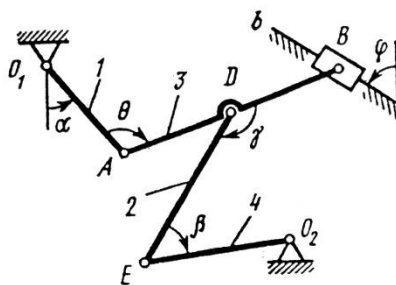


Рис. 3.5

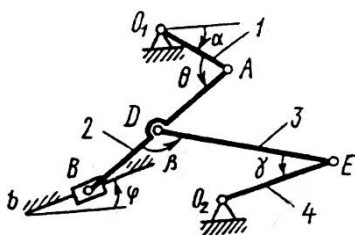


Рис. 3.6

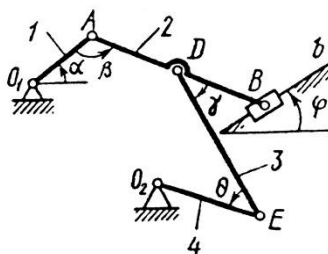


Рис. 3.7

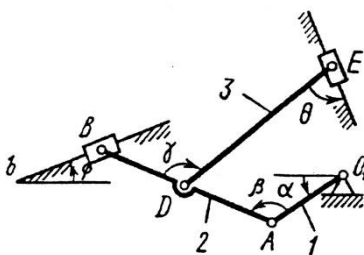


Рис. 3.8

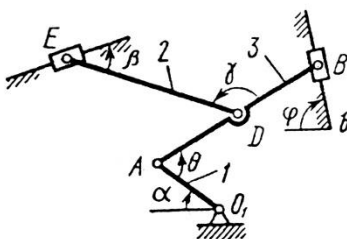


Рис. 3.9

## ЗАДАЧА 4

**Указания.** Задача К4 – на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка  $M$  на пластине в момент времени  $t_1 = 1$  с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 5–9, при решении задачи не подставлять числового значения  $R$ , пока не будут определены положение точки  $M$  в момент времени  $t_1 = 1$  с и угол между радиусами  $CM$  и  $CA$  в этот момент.

Рассмотрим два примера решения этой задачи.

**Пример 4а.** Пластина  $OEAB_1D$  ( $OE = OD$ , рис. 4а) вращается вокруг оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости пластины, по закону  $\varphi = f_1(t)$  (положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рис. К4а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса  $R$  движется точка  $B$  по закону  $s = \overset{\sim}{AB} = f_2(t)$  (положительное направление отсчета  $s$  – от  $A$  к  $B$ ).

Дано:  $R = 0,5$  м,  $\varphi = t^2 - 0,5t^3$ ,  $s = \pi R \cos(\pi t/3)$  ( $\varphi$  – в радианах,  $s$  – в метрах,  $t$  – в секундах). Определить:  $v_{абс}$  и  $a_{абс}$  в момент времени  $t_1 = 2$  с.

**Решение.** Рассмотрим движение точки  $B$  как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением. Тогда абсолютная скорость  $\bar{v}$  <sub>абс</sub> и абсолютное ускорение  $\bar{a}$  <sub>абс</sub> точки найдутся по формулам:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{абс} &= \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер} \\ \bar{a}_{абс} &= \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}\end{aligned}\quad (1)$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{отн} = \bar{a}_{отн}^{\tau} + \bar{a}_{отн}^n, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n.$$

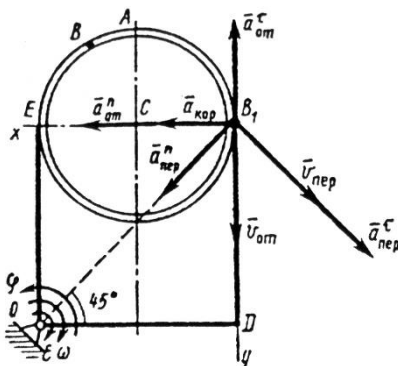


Рис. 4а

Определим все, входящие в равенства (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = \overset{\sim}{AB} = \pi R \cos (\pi t/3). \quad (2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка  $B$  на дуге окружности в момент времени  $t_1$ . Полагая в уравнении (2)  $t_1 = 2$  с, получим

$$s_1 = \pi R \cos (\pi 2/3) = -0,5\pi R.$$

Тогда

$$\angle ACB = \frac{s_1}{R} = -0,5\pi$$

Знак минус свидетельствует о том, что точка  $B$  в момент  $t_1 = 2$  с находится справа от точки  $L$ . Изображаем ее на рис. 4а в этом положении (точка  $B_1$ ).

Теперь находим числовые значения  $v_{отн}$ ,  $a_{отн}^{\tau}$ ,  $a_{отн}^n$

$$= \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(\pi/3)$$

$$a_{отн}^{\tau} = \dot{v}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos(\pi/3), \quad a_{отн}^n = \frac{v_{отн}^2}{\rho_{отн}} = \frac{v_{отн}^2}{R},$$

где  $\rho_{отн}$  – радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности  $R$ . Для момента  $t_1 = 2$  с, учитывая, что  $R = 0,5$  м, получим

$$= -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(2\pi/3) = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12} = -1,42 \text{ м/с,}$$

$$a_{отн}^{\tau} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos(2\pi/3) = \frac{\pi^3}{36} = 0,86 \text{ м/с}^2, \quad a_{отн}^n = \frac{\pi^4}{24} = 4,06 \text{ м/с}^2. \quad (3)$$

Знаки показывают, что вектор  $\bar{a}_{отн}^{\tau}$  направлен в сторону положительного отсчета расстояния  $s$ , а вектор  $\bar{v}_{отн}$  – в противоположную сторону; вектор  $\bar{a}_{отн}^n$  направлен к центру  $C$  окружности. Изображаем все эти векторы на рис. К4а.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону  $\varphi = t^2 - 0,5t^3$ . Найдем сначала угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1,5t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3t$$

и при  $t_1 = 2$  с

$$\omega = -2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = -4 \text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что в момент  $t_1 = 2$  с направления  $\omega$  и  $\varepsilon$  противоположны направлению положительного отсчета угла  $\varphi$ ; отметим это на рис. 4а.

Для определения  $\overline{v}_{nep}$  и  $\overline{a}_{nep}$  находим сначала расстояние  $h_1 = OB_1$  точки  $B_1$  от оси вращения  $O$ . Из рисунка видно, что  $h_1 = 2R\sqrt{2} = 1,41$  м. Тогда в момент времени  $t_1 = 2$  с, учитывая равенства (4), получим

$$\begin{aligned} v_{nep} &= |\omega| \cdot h_1 = 2,82 \text{ м/с}, \\ \overline{a}_{nep}^{\tau} &= |\varepsilon| \cdot h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2, \quad \overline{a}_{nep}^n = \omega^2 h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Изображаем на рис. К4а векторы  $\overline{v}_{nep}$  и  $\overline{a}_{nep}^{\tau}$  с учетом направлений  $\omega$  и  $\varepsilon$  вектор  $\overline{a}_{nep}^n$  (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Модуль кориолисова ускорения определяем по формуле  $a_{кор} = 2|\overline{v}_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между вектором  $\overline{v}_{отн}$  и осью вращения (вектором  $\overline{\omega}$ ). В нашем случае этот угол равен  $90^\circ$ , так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор  $\overline{v}_{отн}$ .

Численно в момент времени  $t_1 = 2$  с, так как в этот момент  $|\overline{v}_{отн}| = 1,42$  м/с и  $|\omega| = 2 \text{ с}^{-1}$ , получим

$$a_{кор} = 5,68 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Направление  $\overline{a}_{кор}$  найдем по правилу Н. Е. Жуковского: так как вектор  $\overline{v}_{отн}$ , лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на  $90^\circ$  в направлении  $\omega$ , т. е. по ходу часовой стрелки. Изображаем  $\overline{a}_{кор}$  на рис. К4а. [Иначе направление  $\overline{a}_{кор}$  можно найти, учтя, что  $\overline{a}_{кор} = 2(\overline{\omega} \times \overline{v}_{отн})$ .]

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены и для определения  $\vec{v}_{abc}$  и  $\vec{a}_{abc}$  остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.

4. Определение  $\vec{v}_{abc}$ . Проведем координатные оси  $B_1xy$  (см. рис. 4а) и спроектируем почленно обе части равенства  $\vec{v}_{abc} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$  на эти оси. Получим для момента времени  $t_1 = 2$  с:

$$\begin{aligned} v_{abc\ x} &= v_{отн\ x} + v_{пер\ x} = 0 - |v_{пер}| \cos 45^\circ = -1,99 \text{ м/с;} \\ v_{abc\ y} &= v_{отн\ y} + v_{пер\ y} = |v_{отн}| + |v_{пер}| \cos 45^\circ = 3,41 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

После этого находим

$$v_{abc} = \sqrt{v_{abc\ x}^2 + v_{abc\ y}^2} = 3,95 \text{ м/с.}$$

Учитывая, что в данном случае угол между  $\vec{v}_{отн}$  и  $\vec{v}_{пер}$  равен  $45^\circ$ , значение  $v_{abc}$  можно еще определить по формуле

$$v_{abc} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 + 2|v_{отн}| \cdot |v_{пер}| \cdot \cos 45^\circ} = 3,95 \text{ м/с.}$$

5. Определение  $\vec{a}_{abc}$ . По теореме о сложении ускорений

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{отн}^\tau + \vec{a}_{отн}^n + \vec{a}_{пер}^\tau + \vec{a}_{пер}^n + \vec{a}_{кор}. \quad (7)$$

Для определения  $\vec{a}_{abc}$  спроектируем обе части равенства (7) на проведенные оси  $B_1xy$ . Получим

$$a_{abc\ x} = a_{отн}^n + a_{кор} + a_{пер}^n \cos 45^\circ - |a_{пер}^\tau| \cos 45^\circ,$$



$$a_{abc\ y} = a_{nep}^n \cos 45^\circ + \left| a_{nep}^\tau \right| \cos 45^\circ - \left| a_{отн}^\tau \right|.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени  $t_1 = 2$  с, найдем, что в этот момент

$$a_{abc\ x} = 9,74 \text{ м/с}^2; \quad a_{abc\ y} = 7,15 \text{ м/с}^2.$$

Тогда

$$a_{abc} = \sqrt{a_{abc\ x}^2 + a_{abc\ y}^2} = 12,08 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:  $v_{abc} = 3,95 \text{ м/с}$ ,  $a_{abc} = 12,08 \text{ м/с}^2$ .

**Пример 46.** Треугольная пластина  $ADE$  вращается вокруг оси  $z$  по закону  $\varphi = f_1(t)$  (положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рис. 46 дуговой стрелкой). По гипотенузе  $AD$  движется точка  $B$  по закону  $s = AB = f_2(t)$ ; положительное направление отсчета  $s$  – от  $A$  к  $D$ .

Дано:  $\varphi = 0,1t^3 - 2,2t$ ,  $s = AB = 2 + 15t - 3t^2$ ; ( $\varphi$  – в радианах,  $s$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах). Определить:  $v_{abc}$  и  $a_{abc}$  в момент времени  $t_1 = 2$  с.

**Решение.** Рассмотрим движение точки  $B$  как сложное, считая её движение по прямой  $AD$  относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость  $v_{abc}$  и абсолютное ускорение  $a_{abc}$  найдутся по формулам:

$$\bar{v}_{abc} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{nep}, \quad \bar{a}_{abc} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{nep} + \bar{a}_{кор}, \quad (1)$$

где, в свою очередь,  $\bar{a}_{nep} = \bar{a}_{nep}^\tau + \bar{a}_{nep}^n$ .

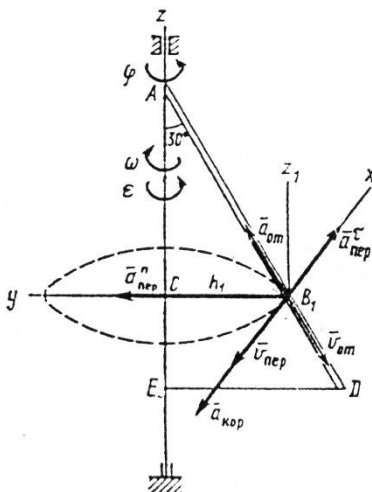


Рис. 46

Определим все входящие в равенство (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2 + 15t - 3t^2. \quad (2)$$

## Поэтому

$$v_{omH} = \dot{s} = 15 - 6t \quad a_{omH} = \dot{v}_{omH} = -6$$

В момент времени  $t_1 = 2$  с имеем

$$s_1 = AB_1 = 20 \text{ cm}, v_{OTH} = 3 \text{ cm/c}, a_{OTH} = -6 \text{ cm/c}^2. (3)$$

Знаки показывают, что вектор  $\vec{v}_{omn}$ , направлен в сторону положительного отсчета расстояния  $s$ , а вектор  $\vec{a}_{omn}$  – в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. 4.6.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону  $\varphi = 0,1t^3 - 2,2t$ .

Найдем угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  переносного вращения:  $\omega = \dot{\varphi} = 0,3t^2 - 2,2$ ;  $\varepsilon = \dot{\omega} = 0,6t$  и при  $t_1 = 2$  с.

$$\omega = -1 \text{ c}^{-1}, \varepsilon = 1, 2 \text{ c}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что в момент  $t_1 = 2$  с направление  $\varepsilon$  совпадает с направлением положительного отсчета угла  $\varphi$ , а направление  $\omega$  ему противоположно; Отметим это на рис. 4б соответствующими дугowymi стрелками.

Из рисунка находим расстояние  $h_1$  точки  $B_1$  от оси вращения  $z$ :  $h_1 = AB_1 \sin 30^\circ = 10$  см. Тогда в момент  $t_1 = 2$  с, учитывая равенства (4), получим

$$\begin{aligned} v_{\text{пер}} &= |\omega| \cdot h_1 = 10 \text{ см/с}, \\ a_{\text{пер}}^\tau &= |\varepsilon| \cdot h_1 = 12 \text{ см/с}^2, \quad a_{\text{пер}}^n = \omega^2 h_1 = 10 \text{ см/с}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Изобразим на рис. К46 векторы  $\bar{v}_{\text{пер}}$  и  $\bar{a}_{\text{пер}}^\tau$  (с учетом знаков  $\omega$  и  $\varepsilon$ ) и  $\bar{a}_{\text{пер}}^n$ ; направлены векторы  $\bar{v}_{\text{пер}}$  и  $\bar{a}_{\text{пер}}^\tau$  перпендикулярно плоскости  $ADE$ , а вектор  $\bar{a}_{\text{пер}}^n$  – по линии  $B_1C$  к оси вращения.

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором  $\bar{v}_{\text{отн}}$  и осью вращения (вектором  $\bar{\omega}$ ) равен  $30^\circ$ , то численно в момент времени  $t_1 = 2$  с

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot |v_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30^\circ = 3 \text{ см/с}^2. \quad (6)$$

Направление  $\bar{a}_{\text{кор}}$  найдем по правилу Н. Е. Жуковского. Для этого вектор  $\bar{v}_{\text{отн}}$  спроектируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору  $a_{\text{пер}}^n$ ) и затем эту проекцию повернем на  $90^\circ$  в сторону  $\omega$ , т. е. по ходу часовой стрелки; Получим направление вектора  $\bar{a}_{\text{кор}}$ . Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор  $\bar{v}_{\text{пер}}$  (см. рис. 4б).

4. Определение  $v_{\text{абс}}$ . Так как  $\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}}$ , а векторы  $\bar{v}_{\text{отн}}$  и  $\bar{v}_{\text{пер}}$  взаимно перпендикулярны, то

$\bar{v}_{abc} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2}$  ; в момент времени  $t_1 = 2$  с  $v_{abc} = 10,44$  см/с.

5. Определение  $a_{abc}$ . По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n + \bar{a}_{кор}. \quad (7)$$

Для определения  $a_{abc}$  проведем координатные оси  $B_1xyz_1$  и вычислим проекции  $\bar{a}_{abc}$  на эти оси. Учтем при этом, что векторы  $\bar{a}_{пер}^{\tau}$  и  $\bar{a}_{кор}$  лежат на оси  $x$ , а векторы  $\bar{a}_{пер}^n$  и  $\bar{a}_{отн}$  расположены в плоскости  $B_1yz_1$ , т. е. в плоскости пластины. Тогда, проектируя обе части равенства (7) на оси  $B_1xyz_1$  и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени  $t_1 = 2$  с:

$$a_{abc\ x} = |a_{пер}^{\tau}| - a_{кор} = 9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{abc\ y} = a_{пер}^n + |a_{отн}| \sin 30^\circ = 13 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{abc\ z1} = |a_{отн}| \cos 30^\circ = 5,20 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим значение  $a_{abc}$

$$a_{abc} = \sqrt{a_{abc\ x}^2 + a_{abc\ y}^2 + a_{abc\ z1}^2} = 16,64 \text{ см/с}^2.$$

Ответ:  $v_{abc} = 10,44$  см/с,  $a_{abc} = 16,64$  см/с<sup>2</sup>.

### Условия.

Прямоугольная пластина (рис. 4.0 – 4.4) или круглая пластина радиуса  $R = 60$  см (рис. 4.5 – 4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi = f_1(t)$ , заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку  $O$  (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения  $OO_1$  лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой  $BD$  (рис. 0–4) или по окружности радиуса  $R$  (рис. 5–9) движется точка  $M$ ; закон ее относительного

движения, т. е. зависимость  $s = AM = f_2(t)$  ( $s$  выражено в сантиметрах,  $t$  – в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0–4 и для рис. 5–9; там же даны размеры  $b$  и  $l$ . На рисунках точка  $M$  показана в положении, при котором  $s = AM > 0$  (при  $s < 0$  точка  $M$  находится по другую сторону от точки  $A$ ).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t_1 = 1$  с.

Таблица 4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 0–4		Для рис. 5–9	
		$b$ , см	$s = AM = f_2(t)$	$l$	$s = AM = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	$R$	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	$R$	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	$R$	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	$R$	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	$R$	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	$R$	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	$R$	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

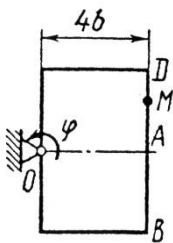


Рис. 4.0

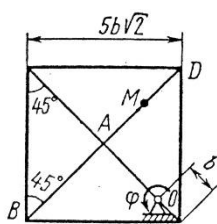


Рис. 4.1

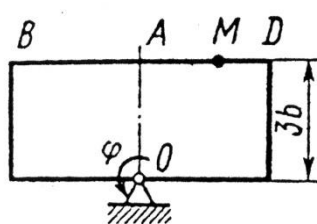


Рис. 4.2

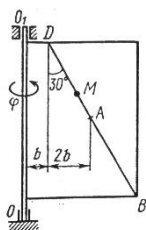


Рис. 4.3

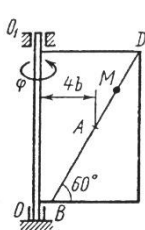


Рис. 4.4

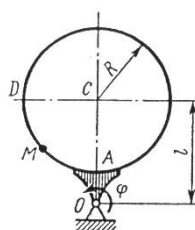


Рис. 4.5

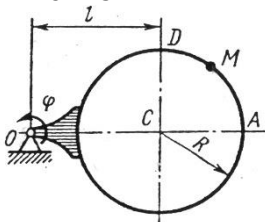


Рис. 4.6

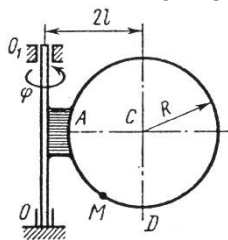


Рис. 4.7

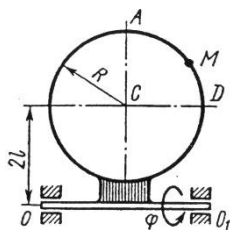


Рис. 4.8

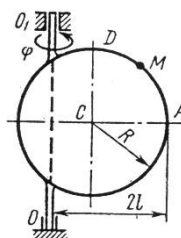


Рис. 4.9